

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2023**

## **MATHÉMATIQUES JOUR 1**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

## EXERCICE 1 (5 points)

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$ .

On admet que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  et, en remarquant que  $f(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$ , justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = -4x \ln(x)$ .
3. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1; +\infty[$  et que  $\alpha \in [1; e]$ .

On admet, dans la suite de l'exercice, que l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

5. On donne la fonction ci-dessous écrite en Python. L'instruction `from lycee import *` permet d'accéder à la fonction `ln`.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a = 1
    b = 2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else:
            a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

On écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

- Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)  
Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)  
Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)  
Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

## Partie B

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , par  $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ .

On admet que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

On note  $C_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans le plan rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$ .
2. Démontrer que la fonction  $g$  admet un maximum en  $x = \alpha$ .

On admet que  $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ .

3. On note  $T_1$  la tangente à  $C_g$  au point d'abscisse 1 et on note  $T_\alpha$  la tangente à  $C_g$  au point d'abscisse  $\alpha$ .  
Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , les coordonnées du point d'intersection des droites  $T_1$  et  $T_\alpha$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

1. Entre 1998 et 2020, en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.
  - a. Avec une précision de 0,1%, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.
  - b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1%. On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.  
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.  
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,016.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise  $n$  accouchements.  
On considère que ces  $n$  accouchements sont indépendants les uns des autres.  
On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.
  - a. Dans le cas où  $n = 20$ , préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.
  - b. Par la méthode de votre choix que vous explicitez, déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que  $P(X \geq 1) \geq 0,99$ .  
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

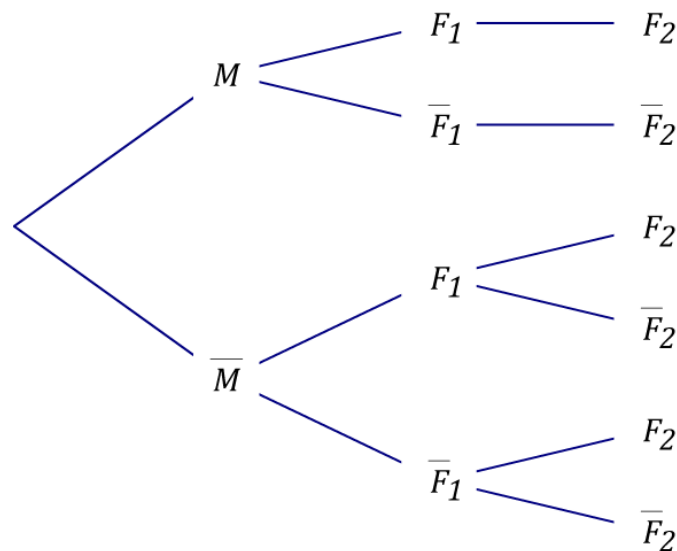
3. Dans cette maternité, parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30% de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70% de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille). Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.
- Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- $M$  : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- $F_1$  : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- $F_2$  : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera  $P(A)$  la probabilité de l'évènement  $A$  et  $\bar{A}$  l'évènement contraire de  $A$ .

- Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessous.
- Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,31507.
- Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



### EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0; 4; 16)$ ,  $B(0; 4; -10)$ ,  $C(4; -8; 0)$  et  $K(0; 4; 3)$ .

On définit la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $K$  et de rayon 13 comme l'ensemble des points  $M$  tels que  $KM = 13$ .

1.

- a. Vérifier que le point  $C$  appartient à la sphère  $\mathcal{S}$ .
- b. Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

2.

- a. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
- b. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

3. On admet que la sphère  $\mathcal{S}$  coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative. On note  $D$  celui qui a une abscisse positive.

- a. Montrer que le point  $D$  a pour coordonnées  $(12; 0; 0)$ .
- b. Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $D$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .
- c. Déterminer la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$ .

4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre  $ABCD$ .

*On rappelle la formule du volume  $\mathcal{V}$  d'un tétraèdre :*

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

*où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur associée.*

## EXERCICE 4 (5 points)

### PARTIE A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,3$  et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .
2. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ .  
Calculer  $u_1$  puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite  $(u_n)$  est égale à  $\frac{1}{2}$ .

### PARTIE B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.  
En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note  $P_n$  l'effectif en milliers de la population l'année 2022 +  $n$ . Ainsi  $P_0 = 3$ .  
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du 19<sup>e</sup> siècle, on considère que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel  $b$  est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question  $b = 0$ .
  - a. Justifier que la suite  $(P_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
  - b. Déterminer la limite de  $P_n$ .
2. Dans cette question  $b = 0,2$ .
  - a. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = 0,1 \times P_n$ .  
Calculer  $v_0$  puis montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$ .
  - b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.