BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

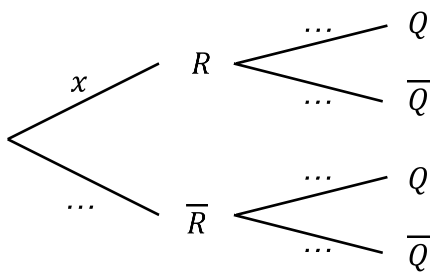
On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.



a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Montrer que $x = 0{,}9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615). La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient $50\ \mathrm{m}^3$ d'eau. On rappelle que $1\mathrm{m}^3 = 1000\ \mathrm{L}$.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg.L^{-1}}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\ \mathrm{mg.L^{-1}}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0{,}01\ \mathrm{mg.L^{-1}}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0{,}70\ \mathrm{mg.L^{-1}}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de $15\ \mathrm{g}$ de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 $\mathrm{mg.L^{-1}}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg.L^{-1}}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
On admet que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
   n=0
   v=0.7
   while .................... :
      n= ...........
      v= ...........
   return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\mathrm{mg.L^{-1}}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

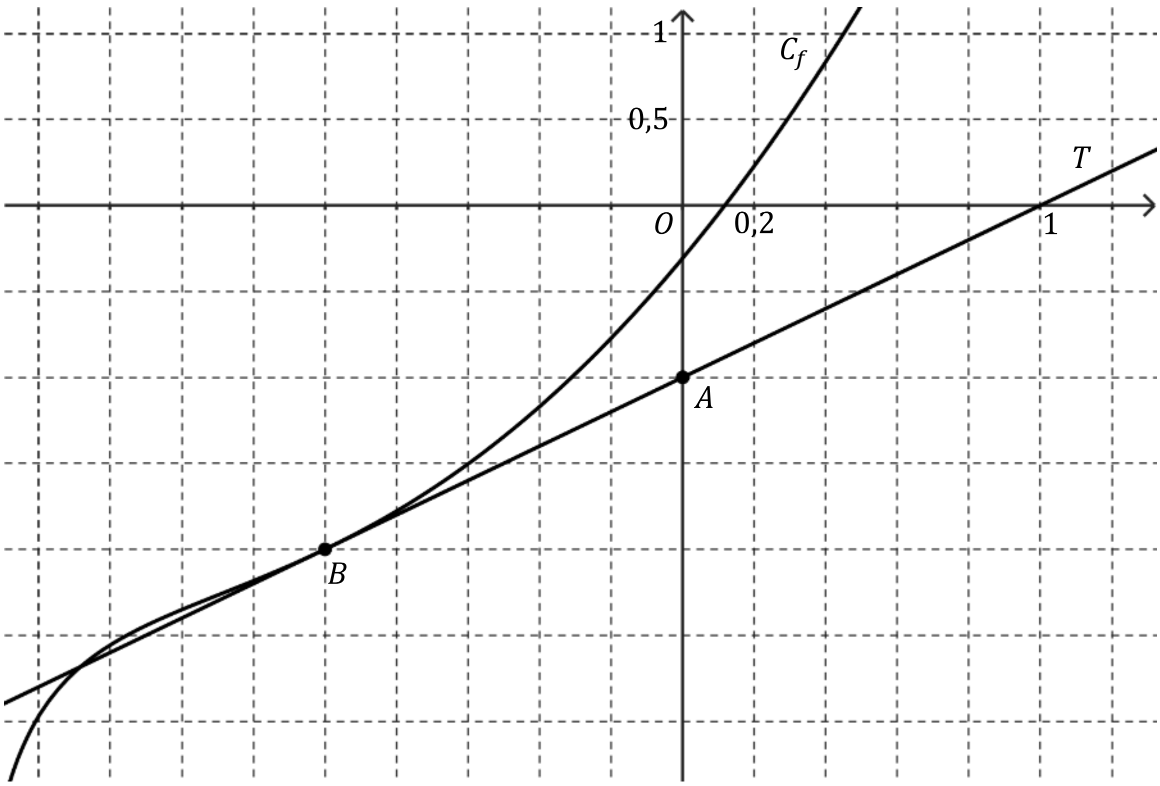
2.

a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0{,}7\ \mathrm{mg.L^{-1}}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\ \mathrm{mg.L^{-1}}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 3 (6 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe C_f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f.

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.

6. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

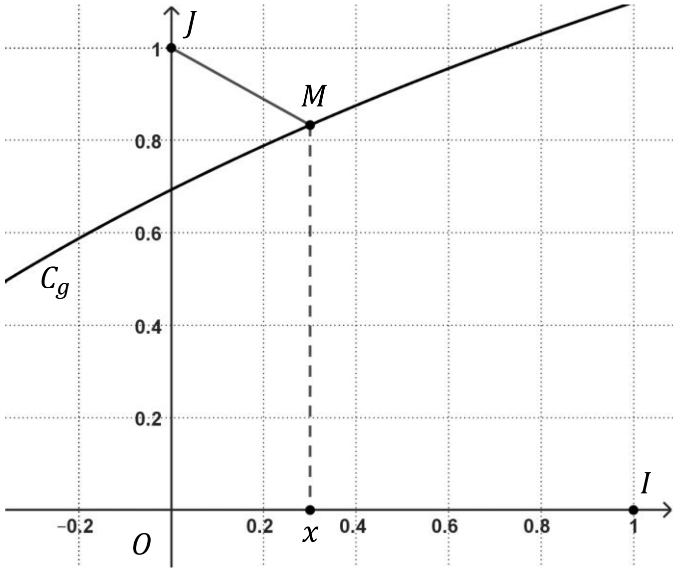
Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, représentée ci-contre.

Soit M un point de C_g d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$,
$$h'(x) = \frac{2\,f(x)}{x+2}.$$
où f est la fonction étudiée en partie B.

   a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$.
   Les limites ne sont pas demandées.

   b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_α le point de C_g d'abscisse α.
   a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   b. En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Tourner la page

Exercice 4 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2;0;0),\ B(0;4;3),\ C(4;4;1),\ D(0;0;4)\ \text{et}\ H(-1;1;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).