BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

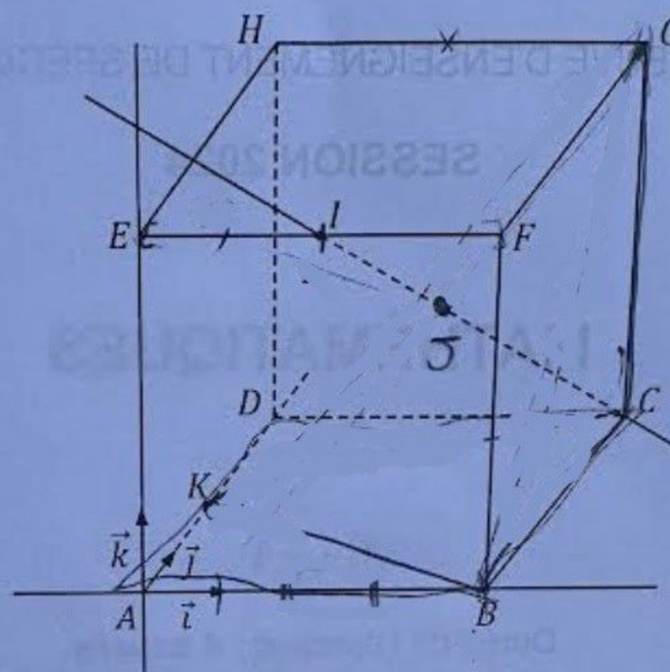
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On considère le repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4\,;0\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête $[EF]$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :
   $$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$
3. On désigne par P le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de P avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est donnée par :
   $$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$
   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9};\frac{20}{9};\frac{16}{9}\right)$. Que représente J par rapport à C ?
   c. Vérifier que le point $K(0\,;2\,;0)$ appartient au plan P.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans P et (ABC).
4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{\mathcal{B}\times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   a. Déterminer le volume de la pyramide $CBKG$.
   b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
5. Justifier que la droite (BG) est incluse dans P.
6. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et P' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G.
   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Exercice 2 (4 points)

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2.
   a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Tourner la page

Exercice 3 (6 points)

Partie A : étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$u_n \geq 0.$$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note l la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de l.
5.
   a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la function ln :
#le logarithme népérien

def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return n
```

   b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)dx\,.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leq f(x) \leq 0{,}25x + 0{,}25\,.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2\,.$$

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 :
La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe C_f de la fonction f.

b. Affirmation 2 :
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x) - 5} = +\infty\,.$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$.

a. Affirmation 3 :
Le point $A\left(2\,;\frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe C_g de la fonction g.

b. Affirmation 4 :
Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;2[$, on a : $g(x) \leq x$.

3. **Affirmation 5 :**
L'équation $x\ln x = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.